به نام خدا

ریاضی عمومی ۱
پاییز ۹۵-۹۴

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

فصل دوم-پایداری محاسبه

همانطور که در کاربرگ پیش دیدیم، برای جمع، ضرب و تقسیم دو عدد مجبور به استفاده از مقادیر تقریبی آن‌ها بودیم. بنابراین برای هر چه دقیق‌تر محاسبه کردن، باید تقریب بهتری از اعداد را در نظر گرفت. در این کاربرگ نیز همین روند را ادامه خواهیم داد. در واقع موضوع اصلی این کاربرگ تولید نظریه‌ای برای کنترل خطا در محاسبات است. برای این منظور ابتدا تعریف تابع حقیقی یک متغیره را یادآوری می‌کنیم. به طور کلی در ریاضی عمومی ۱، توابع یک متغیره حقیقی را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱ (تابع یک متغیره حقیقی). $f : S \to \mathbb{R}$ یک تابع یک متغیره حقیقی است اگر $S \subset \mathbb{R}$ باشد و f به هر عضو S مانند x عدد حقیقی مشخصی را نسبت دهد که آن را با نماد $f(x)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید f یک تابع یک متغیره حقیقی باشد؛ می‌خواهیم بدانیم تحت چه شرایطی روی f می‌توان خطا را کنترل کرد. یعنی به توان تعیین کرد که x باید چه تقریبی از x_0 باشد تا مطمئن شویم که $f(x)$ به اندازه دلخواه‌مان به $f(x_0)$ نزدیک است. ابتدا سه مثال ساده را بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۱.

الف) تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = 5x + 3$ تعریف می‌کنیم. ورودی این تابع باید با چه دقتی معلوم باشد تا خطای خروجی آن از 10^{-4} کوچک‌تر باشد؟

ب) تابع مجذور کردن، یعنی تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را با ضابطه $f(x) = x^2$ در نظر بگیرید. عدد x باید با چه دقتی معلوم باشد تا خطای محاسبه مجذور آن از 10^{-3} کوچک‌تر باشد؟ دو نقطه $x = 1$ و $x = 1000$ را با هم مقایسه کنید. به ازای چه مقادیری از x باید تقریب بهتری در نظر بگیریم؟
یادآوری: مجذور کردن شبیه ضرب کردن دو عدد در هم است. بنابراین جواب‌تان باید به اندازه x وابسته باشد.

ج) تابع معکوس‌سازی، یعنی $f : \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \to \mathbb{R}$، را با ضابطه $f(x) = 1/x$ در نظر بگیرید. عدد x باید با چه دقتی معلوم باشد تا خطا در محاسبه معکوس آن از 10^{-2} کوچک‌تر باشد؟ در اینجا نیز مانند قسمت (ب) جواب به x وابسته است.

فعالیت ۲. مثال‌های فعالیت ۱ همگی دارای خاصیت **پایداری محاسبه(!)** هستند.

الف) با توجه به فعالیت ۱ یک تعریف برای **پایداری محاسبه** ارائه دهید.

ب) آیا تعریف‌تان وابسته به یک نقطه است؟ آیا می‌توانید تابعی مثال بزنید که با تعریف خودتان در نقطه‌ای پایداری محاسبه داشته باشد و در نقطه‌ای دیگر دارای این خاصیت نباشد؟

ج) آیا تعریف‌تان با تعریف پیوستگی تابع که از قبل می‌دانستید فرق می‌کند؟

د) اگر تعریف‌تان با تعریف پیوستگی تابع یکی است، آیا این تعریف با شهودتان از پیوستگی سازگار است؟

ه) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ ۱-x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

نشان دهید که این تابع فقط در نقطه ۰/۵ دارای پایداری محاسبه (یا همان پیوستگی) است.

و) نشان دهید هر تابع روی مجموعه اعداد صحیح مانند $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ پیوسته است.

تعریف ۲ (پیوستگی تابع در یک نقطه)**.** فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد، $a\in S$ و تابعی مانند $f:S\to\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم f در a پیوسته است (یا در a ویژگی پایداری محاسبه دارد)، به شرطی که به ازای هر عدد مثبت مانند ε، عددی مثبت مانند δ وجود داشته باشد که به ازای هر نقطه از دامنه f مانند x که $|x-a|<\delta$، نابرابری $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ برقرار باشد.

گزاره ۳ (جمع، ضرب و تقسیم توابع پیوسته)**.** فرض کنید دامنه تعریف تابع‌های f و g مجموعه S باشد، و f و g هر دو در نقطه a پیوسته باشند. در این صورت

الف) تابع $f+g:S\to\mathbb{R}$ با ضابطه $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ در نقطه a پیوسته است.

ب) تابع $f.g:S\to\mathbb{R}$ با ضابطه $(f.g)(x)=f(x)g(x)$ در نقطه a پیوسته است.

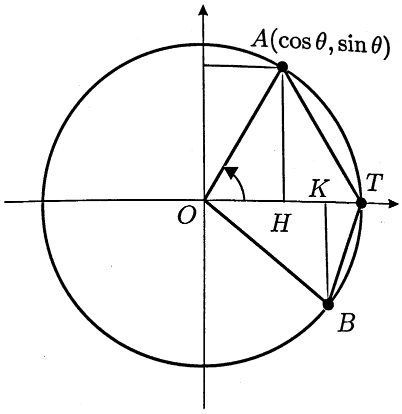
ج) فرض کنید به ازای هر $x\in S$، $g(x)\neq ۰$. در این صورت، تابع $f/g:S\to\mathbb{R}$ با ضابطه

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

در نقطه a پیوسته است.

گزاره ۴ (ترکیب دو تابع پیوسته)**.** تابع‌های $f:S\to\mathbb{R}$ و $g:T\to\mathbb{R}$ داده شده‌اند، $a\in S$، $f(a)=b$، $b\in T$ و f در نقطه a پیوسته است و g در نقطه b. در این صورت، تابع $g\circ f$ در نقطه a پیوسته است.

گزاره ۵ (تعریف دنباله‌ای پیوستگی)**.** فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد، $a\in S$ و f تابعی از S به $\mathbb{R}$. f در نقطه a پیوسته است، اگر و فقط اگر به ازای هر دنباله از نقاط S مانند (a_n) که به a همگراست، دنباله $(f(a_n))$ به $f(a)$ همگرا باشد.



شکل ۱

فعالیت ۳ (اثبات گزاره ۵).

الف) ابتدا فرض کنید f در a پیوسته باشد و $a_n \to a$، در این صورت باید نشان دهید $f(a_n) \to f(a)$.

ب) با برهان خلف فرض کنید f در a پیوسته نباشد؛ یعنی $\varepsilon > 0$ وجود دارد که برای هر $\delta > 0$، x ای یافت می‌شود که $|x-a| < \delta$ ولی $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$. حال دنباله‌ای بیابید که به a همگرا باشد اما $f(a_n) \not\to f(a)$.

فعالیت ۴ (پیوستگی توابع مثلثاتی).

الف) با توجه به شکل ۱، نشان دهید توابع $\cos(\theta)$ و $\sin(\theta)$ در نقطه 0 پیوسته‌اند.

ب) با استفاده از قسمت (الف)، نشان دهید تابع $\cos(\theta)$ در همه نقاط پیوسته است. و از آن نتیجه بگیرید که تابع $\sin(\theta)$ نیز در همه نقاط پیوسته است.